

# DYNAMISCHE SYSTEME IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Von D.Dorninger (TU Wien)

Im ersten Abschnitt der Abhandlung befassen wir uns mit Begriffsbildungen und Zielsetzungen der Systemtheorie unter dem Blickwinkel eines möglichen Schultransfers, wobei die theoretischen Überlegungen durch konkrete Anwendungsbeispiele unterstützt werden. Der zweite Abschnitt ist Computersimulationen im Unterricht gewidmet, und den Abschluß bildet eine kurze Diskussion einiger didaktischer Aspekte.

## 1. Begriffsbildungen und Zielsetzungen

### 1.1 Definition eines dynamischen Systems

Ein *dynamisches System* ist ein mathematisches Modell zur Beschreibung der zeitlichen Veränderung eines Wirklichkeitsausschnittes. Wir nehmen an, das System hat einen *Eingang*, den wir in Form eines Vektors  $\vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$  und einen *Ausgang*, den wir durch  $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t))$  angeben.  $t$  steht für die sich ändernde Zeit (siehe Abb.1). Die Komponenten von  $\vec{u}(t)$  können nicht

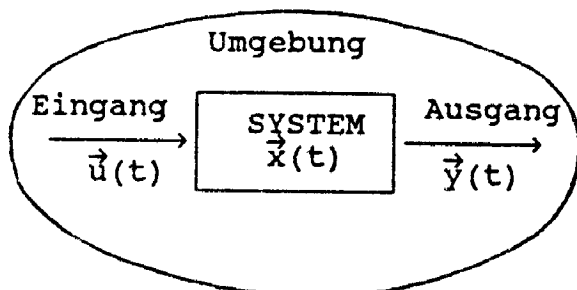


Abb.1

beeinflussbare Größen wie etwa Störungen von außen sein, oder aber sog. *Stellgrößen*, das sind Werte, welche "einstellbar" sind, sodaß man über sie das System (bis zu einem gewissen Grad) steuern kann. Bei den

Komponenten des Ausgangsvektors  $\vec{y}(t)$  kann es sich einerseits um Resultate von Beobachtungen am System handeln, andererseits aber auch um Größen, welche auf die Umgebung des Systems zurückwirken. Wir führen einen weiteren Vektor  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  ein, um den Zustand des Systems zu beschreiben.  $\vec{x}(t)$  sollte nach Möglichkeit eine physische Entsprechung haben, es kann sich aber auch um eine bloße Hilfsgröße handeln. Zum Zeitpunkt  $t_0$  repräsentiere  $\vec{x}(t_0)$  diejenige Information über die Vorgeschichte des Systems, welche für die zeitliche Entwicklung nach diesem Zeitpunkt von Bedeutung ist.  $\vec{x}(t)$  hängt von  $\vec{u}(t)$  und vom vorangegangenen Zustand ab. Der "Outputvektor"  $\vec{y}(t)$  ist aus  $t$  und  $\vec{x}(t)$  zu er-

mitteln.

Es ist möglich, den Zusammenhang zwischen  $\vec{u}, \vec{x}$  und  $\vec{y}$  in Abhängigkeit von  $t$  und von vorgegebenen Anfangsbedingungen im Rahmen einer exakten mathematischen Definition des Begriffs dynamisches System axiomatisch festzulegen. Für den Sonderfall eines endlichdimensionalen linearen Systems ergibt eine derartige Definition unter passenden Voraussetzungen die folgenden Systemgleichungen:

a) im kontinuierlichen Fall

b) bei diskreter Zeitachse mit  $t=0,1,2,\dots$

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t) &= A(t)\vec{x}(t)+B(t)\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= C(t)\vec{x}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}(t+1) &= A(t)\vec{x}(t)+B(t)\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= C(t)\vec{x}(t). \end{aligned}$$

Dabei ist  $\vec{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ , und  $A, B, C$  sind eine  $n \times n$ -, eine  $n \times m$ - und eine  $p \times n$ -Matrix. Hängen diese Matrizen nicht von der Zeit  $t$  ab, spricht man von einem zeitinvarianten linearen System.

Im Fall a) handelt es sich also um ein lineares Differentialgleichungssystem, bei b) um ein lineares System von Differenzgleichungen.

Beispiel 1 (Dynamisches Netzwerk für die Wasserspeicherung; vgl. [3]):

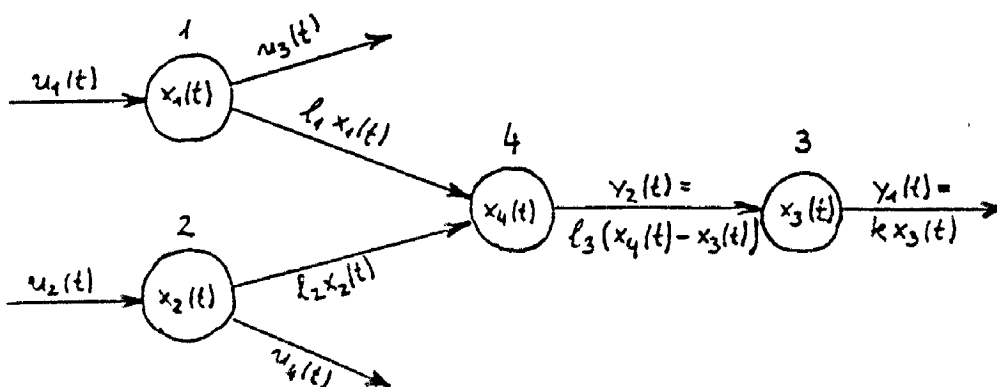


Abb. 2

In dem in Abb. 2 wiedergegebenen Netzwerk bedeuten  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  die Zufuhr von Wasser durch Regenfälle und  $u_3(t)$ ,  $u_4(t)$  stehen für "gesteuerte" Wasserentnahmen ( $u_3$  und  $u_4$  sind also negative Eingangsgrößen).  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  bezeichnen die gespeicherten Wasser-

mengen an Stellen 1,2,3 der Oberfläche und  $x_4(t)$  die gespeicherte Grundwassermenge an einer Stelle 4. Die Infiltrationen in den Grundwassersee 4 von der Oberfläche sind durch  $l_1x_1(t)$  und  $l_2x_2(t)$  gegeben, und vom Grundwasser tritt die Menge  $y_2(t) = l_3(x_4(t) - x_3(t))$  an der Stelle 3 an die Oberfläche; von dort fließt  $y_1(t) = kx_3(t)$  ab.

Damit lauten die Bilanzgleichungen für die Zustandsgrößen und die Gleichungen für die Ausgangsgrößen

$$\begin{aligned} x_1' &= -l_1x_1 + u_1 - u_3 & y_1 &= kx_3 \\ x_2' &= -l_2x_2 + u_2 - u_4 & y_2 &= l_3(x_4 - x_3) \\ x_3' &= l_3(x_4 - x_3) - kx_3 \\ x_4' &= l_1x_1 + l_2x_2 - l_3(x_4 - x_3) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können mittels Vektoren und Matrizen in der Form  $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$ ,  $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$  geschrieben werden.

## 1.2 Zielsetzungen

Gegeben sei ein dynamisches System sowie eine Anfangszeit  $t_0$ , ein Anfangszustand  $\vec{x}_0$  und ein Endzustand  $\vec{x}_1$ . Das System heißt steuerbar von  $\vec{x}_0$  nach  $\vec{x}_1$  zum Zeitpunkt  $t_0$ , wenn es ein  $t_1 > t_0$  gibt, sodaß man durch Wahl einer geeigneten "Steuerfunktion"  $\vec{u}(t)$  mit  $t_0 \leq t \leq t_1$  von  $\vec{x}_0$  nach  $\vec{x}_1$  gelangen kann. - Dies setzt natürlich voraus, daß  $\vec{u}(t)$  im System vorkommt und die Komponenten von  $\vec{u}(t)$  Stellgrößen sind.

Beispiel 2 (Entwicklung der Größe einer Tierpopulation): Eine Tierpopulation vermehre sich ohne Eingriff des Menschen gemäß der logistischen Wachstumsgleichung  $x'(t) = r(1 - \frac{x(t)}{K})x(t)$ . Dabei ist  $x(t)$  die Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt  $t$ ,  $r$  die Reproduktionsrate und  $K$  die Umweltkapazität. Wird die Tierpopulation durch den Menschen mit einer Rate  $u(t)$  "abgeerntet", so ändert sich die Wachstumsgleichung gemäß  $x'(t) = r(1 - \frac{x(t)}{K})x(t) - u(t)x(t)$ . Der Ernteertrag  $y(t)$  sei gegeben durch  $y(t) = u(t)x(t)$ .

Wir zeigen, daß das System mittels einer konstanten Funktion  $u(t) = u$

steuerbar ist und berechnen jenes konstante  $u$ , für welches der Ertrag  $y(t)$  im Fall eines positiven ökologischen Gleichgewichts (d.h. im Fall einer positiven konstanten Lösung  $x(t)$ ) maximal wird. Die Größe der Tierpopulation am Anfang sei  $x_0$ .

Zunächst sieht man, daß das System  $\frac{dx}{dt} = (r-u)x - \frac{r}{K} x^2$  explizit lösbar ist. (Das kann in der Schule z.B. durch Übergang zur Umkehrfunktion  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{(r-u)x - (r/K)x^2}$  und anschließender Integration mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung geschehen.) Die Lösung zur Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  lautet:

$$x(t) = \frac{x_0}{(1 - \frac{x_0}{C})e^{-(r-u)t} + \frac{x_0}{C}} \quad \text{mit } C = \frac{K(r-u)}{r} .$$

Der qualitative Verlauf von  $x(t)$  ist für die Fälle  $x_0 < C$  und  $x_0 > C$  in Abb.3 wiedergegeben.

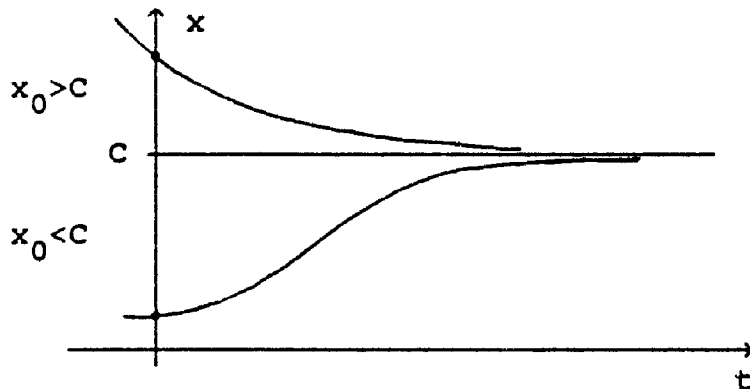


Abb.3

Wie man leicht nachrechnet, ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = C$ . Damit  $C > 0$  ist, muß aber  $u < r$  sein, was wir im folgenden annehmen wollen. Durch Lösung der Gleichung  $x'(t) = 0$  sieht man sofort, daß  $C$  eine

Gleichgewichtslage des Systems ist, und zwar die einzige positive.

Ist nun ein beliebiges  $x_1 > 0$  gegeben, so ist  $u$  stets so wählbar, daß dieser Zustand ausgehend von  $x_0$  in endlicher Zeit erreicht wird, denn über  $u$  ist  $C$  beliebig festlegbar (sofern wir voraussetzen, daß auch negative  $u$  zugelassen sind, d.h., daß es durch einen Eingriff des Menschen auch zu einer Vermehrung der Population kommen kann.)

Um in der Gleichgewichtslage  $x^* = C$  den Ertrag  $y = uC$  zu maximieren müssen wir  $u$  so wählen, daß  $y(u) = u \frac{K(r-u)}{r}$  maximal wird. Wie man sofort sieht, ist  $y(u)$  eine konkave Funktion, welche ihr absolutes

Maximum beim relativen Maximum, welches bei  $u = \frac{r}{2}$  liegt, annimmt. In diesem Fall ist  $C = \frac{K}{2}$ , d.h.  $x^* = \frac{K}{2}$ .

Es erhebt sich nun die Frage, ob der Gleichgewichtszustand  $x^* = \frac{K}{2}$  stabil ist, d.h., ob für eine nicht zu große Auslenkung aus der Gleichgewichtslage der Zustand  $x(t)$  stets in einer vorgegebenen Umgebung des Gleichgewichtszustandes  $x^*$  verbleibt. Genauer: Die Gleichgewichtslösung  $x(t) = x^*$  heißt stabil, falls es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, sodaß für alle (neuen Anfangszustände)  $x_0$  mit  $|x_0 - x^*| < \delta$  gilt  $|x(t) - x^*| < \epsilon$  für  $t \geq t_0$ . - Gilt überdies, daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ , so heißt der Gleichgewichtszustand  $x^*$  asymptotisch stabil.

Nehmen wir an, die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage beträgt  $v_0$ , dann ergibt sich damit ein neuer Anfangszustand  $x_0 = \frac{K}{2} + v_0$ . Wie schnell klingt die Störung  $v(t) = x(t) - \frac{K}{2}$  ab? Wir setzen  $x(t) = v(t) + \frac{K}{2}$  in die Gleichung  $x'(t) = r(1 - \frac{x}{K})x - \frac{r}{2}x$  ein und erhalten dadurch die Gleichung  $v'(t) = -\frac{rv}{2} - \frac{rv^2}{K}$ . Linearisierung, d.h. Vernachlässigung des quadratischen Gliedes, führt zu  $v'(t) = -\frac{rv}{2}$ , woraus  $v(t) = v_0 e^{-\frac{r}{2}t}$  folgt. Wir sehen also, die Störung klingt exponentiell mit der Zeit ab, woraus man auf die Stabilität von  $x^* = \frac{K}{2}$  schließen kann. Wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{K}{2}$  für  $u = \frac{r}{2}$  ist der Gleichgewichtspunkt sogar asymptotisch stabil.

Während man bei Stabilitätsfragen wie den eben besprochenen die Steuerfunktion als gegeben annimmt, geht es beim Problem der Stabilisierbarkeit eines dynamischen Systems darum, erst eine Steuerfunktion als Funktion des Zustands bzw. Ausgangs zu finden, sodaß die entsprechende Gleichgewichtslage des so entstehenden "geregelten" Systems stabil ist; siehe Abb.4 (Regelung durch Zustandsrückführung).

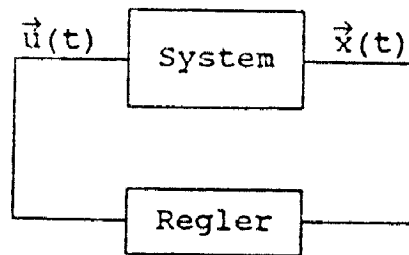


Abb. 4

Eine *Regelung* stellt bei praktischen Problemen eine unverzichtbare Ergänzung zur Steuerung dar. Sie besteht ganz allgemein darin, während der Steuerung fortwährend den Systemzustand zu überwachen und jede Abweichung von einem vorgegebenen Sollzustand sofort zu korrigieren.

Allerdings ist es nicht immer möglich, den Zustand eines Systems exakt festzustellen. Man ist vielfach darauf angewiesen, den Systemzustand mit Hilfe des Ausgangs zu schätzen.

Ein dynamisches System heißt *beobachtbar* zum Zeitpunkt  $t_0$ , wenn es möglich ist, aus der Kenntnis von  $\vec{u}(t)$  und  $\vec{y}(t)$  während eines endlichen Intervalls  $[t_0, t_1]$  den Zustand  $\vec{x}(t_0)$  zu berechnen. Ist dies nicht möglich, so sucht man nach einem geeigneten Näherungswert für  $\vec{x}(t_0)$ . Das wichtigste Instrument hierzu ist der *dynamische Beobachter*, selbst ein dynamisches System, welches den Eingang  $(\vec{u}(t), \vec{y}(t))$  hat und dessen Zustand als Näherungswert für  $\vec{x}(t)$  genommen wird.

Ist  $\vec{u}(t) = \vec{0}$  für alle  $t$ , so liegt ein *ungesteuertes dynamisches System* vor, also zumeist ein System von Differential- oder Differenzgleichungen.

Bei der *Behandlung von Systemen von Differentialgleichungen* im Unterricht wird man sehr schnell an Grenzen stoßen. Eine Möglichkeit, bei Systemen mit einem zweidimensionalen Zustandsvektor  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  auf analytischem Weg zumindest zu qualitativen Aussagen zu gelangen, besteht oft darin, die *Phasenkurven*, welche einen Zusammenhang zwischen den Variablen  $x_1$  und  $x_2$  wiedergeben, zu studieren.

Beispiel 3 (Dreiklassenmodell einer Epidemie): In einer ge-

schlossenen Population mit  $N$  Mitgliedern, in der eine Epidemie herrscht, bezeichne  $G(t)$  und  $K(t)$  die Gesunden bzw. die Kranken zum Zeitpunkt  $t$  und  $A(t)$  die Anzahl der durch Immunität oder Tod Ausgeschiedenen. Wir nehmen an, daß die Abnahme  $\frac{dG}{dt}$  der Anzahl der Gesunden mit der Zeit  $t$  proportional zur Zahl der Kontakte zwischen Gesunden und Kranken sei und daß diese Zahl ihrerseits proportional zu  $G(t)K(t)$  ist. Ferner nehmen wir an, daß die Änderung  $\frac{dA}{dt}$  proportional zur Zahl der Kranken ist. Zum Zeitpunkt  $t=0$  gebe es  $K_0$  Kranke und  $G_0 = N - K_0$  Gesunde. Wir wollen den Verlauf der Epidemie studieren.

Als Modellgleichungen setzen wir an

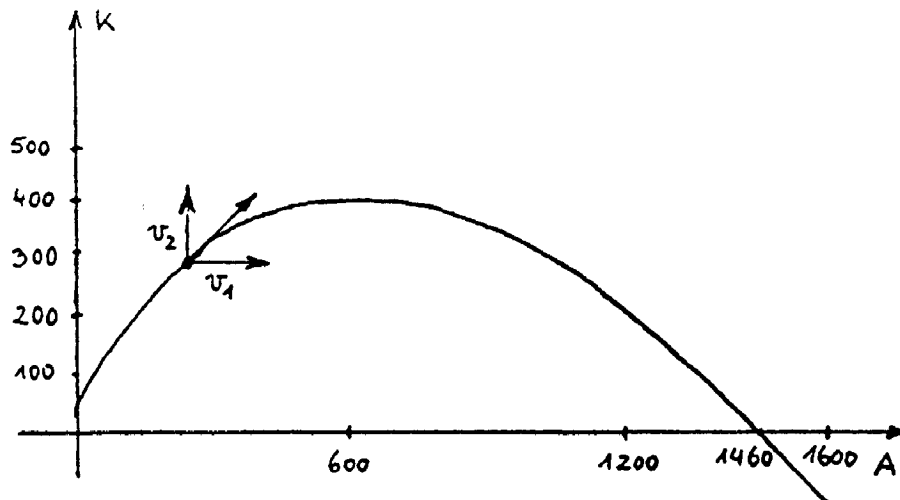
$$(1) \frac{dG}{dt} = -\beta GK \qquad (2) \frac{dA}{dt} = \gamma K \qquad (3) G+K+A = N$$

Wegen (3) ist  $G$  durch  $A$  und  $K$  ausdrückbar, sodaß wir z.B.  $(A(t), K(t))$  als Zustandsvektor des dynamischen Systems ansehen können. Dieser Zustandsvektor beschreibt dann die Epidemie in jedem Augenblick vollständig.

(1), (2)  $\rightarrow \frac{dG}{dt} = -\frac{\beta}{\gamma}G$ , woraus  $G = G_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}A}$  folgt, was mit  $G = N - K - A$  auf die Gleichung  $K = N - A - G_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}A}$  führt. (Zur Herleitung dieser Gleichung in der Schule könnte man etwa bei (1) zur Umkehrfunktion übergehen, was  $\frac{dt}{dG} = -\frac{1}{\beta GK}$  ergibt, dann unter Berücksichtigung von (2) die Kettenregel  $\frac{dA}{dG} = \frac{dA}{dt} \frac{dt}{dG}$  ausnützen, was  $\frac{dA}{dG} = -\frac{\gamma}{\beta G}$  nach sich zieht und schließlich  $A$  unmittelbar durch Integration gewinnen.)

Der Graph der Funktion  $K(A) = N - A - G_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}A}$  in einem  $(A, K)$ -Koordinatensystem (der Phasenebene), wird - wie erwähnt - Phasenkurve genannt. Die Funktion  $K(A)$  hat den Definitionsbereich  $[0, N]$ ; sie ist konkav und erreicht an der Stelle  $A = \rho \ln \frac{G_0}{\rho}$  mit  $\rho = \frac{\gamma}{\beta}$  ihr Maximum Die Epidemie ist zu Ende, wenn für  $A$  gilt  $K(A) = N - A - G_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}A} = 0$ . In Abb.5 ist die Phasenkurve für den Fall  $N=1600$ ,  $G_0=1590$ ,  $\gamma=0,06$  und  $\beta=0,0001$  wiedergegeben. Unter diesen Bedingungen ist das Ende der Epidemie bei  $A=1460$ , das Maximum bei  $A=585$ , und die größte

Anzahl von Krankheitsfällen beträgt gerundet 415.



Aus der Tatsache, daß das Maximum von  $K(A)$  bei  $A = \rho \ln \frac{G_0}{\rho}$  angenommen wird, können wir folgern, daß es nur zu einem Ausbruch der Epidemie kommt (d.h. ein Ansteigen der Zahl der Krankheitsfälle möglich ist) falls  $\rho < G_0$  ist. Um zu erreichen, daß  $\rho = \frac{\gamma}{\beta} > G_0$  wird, kann man entweder trachten,  $\beta$  entsprechend zu verkleinern (etwa durch Impfungen) oder versuchen,  $G_0$  unter  $\rho$  zu drücken (was etwa bei der Maul- und Klauenseuche durch Schlachtungen geschieht).

An Hand der Phasenkurve kann man auch die Geschwindigkeit veranschaulichen, mit der die Epidemie fortschreitet (aus [9]): Ein Punkt  $(A, K)$  der Phasenkurve hat in Richtung der  $A$ -Achse die Geschwindigkeitskomponente  $v_1 = A'$  und in Richtung der  $K$ -Achse die Geschwindigkeitskomponente  $v_2 = K' = -A' \left(1 - \frac{G_0}{\rho} e^{-\frac{A}{\rho}}\right)$  (vgl. Abb. 4). Also beträgt seine Momentangeschwindigkeit dem Betrage nach  $\omega = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} =$

$= |\gamma K| \sqrt{1 + \left(1 - \frac{G_0}{\rho} e^{-\frac{A}{\rho}}\right)^2}$ , was etwa durch ein Fadenkreuz, das mit der Geschwindigkeit  $\omega$  die Phasenkurve entlangläuft, deutlich gemacht werden kann.

Einfacher als die Behandlung von Differentialgleichungssystemen wird sich in der Schule die *Besprechung von Systemen von Differenzgleichungen* gestalten. Dies deswegen, als sich Differenzgleichungssysteme wesentlich besser für Computersimulationen eignen als Differentialgleichungssysteme, worauf wir im nächsten Abschnitt



noch zurückkommen werden. Darüber hinaus läßt sich bei Differenzgleichungen erster Ordnung der Form  $x(t+1) = f(x(t))$  das Auffinden der Lösungen sowie das qualitative Verhalten der Lösungen graphisch bewältigen. Man zeichnet etwa in ein  $x, z$ -Koordinatensystem die Funktionen  $z=f(x)$  und  $z=x$  ein und kann dann, ausgehend von  $x_0$  so wie aus Abb.6 hervorgeht, die Lösungsfolge zur Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  finden. Die  $x$ -Koordinate eines jeden Schnittpunktes von  $z=f(x)$  und der Geraden  $z=x$  ist ein Gleichgewichtszustand  $x^*$ . Anschaulich ist sofort einsichtig, daß  $x^*$  im Fall  $|f'(x^*)| < 1$  asymptotisch stabil und für  $|f'(x^*)| > 1$  instabil ist.

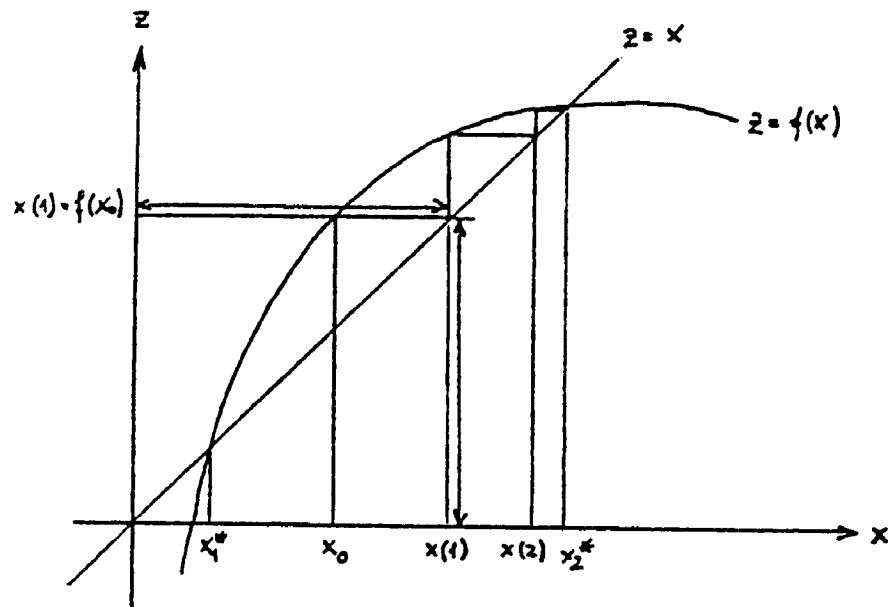


Abb. 6

Beispiel 4 (Marktmodell): Wir betrachten einen Elementarmarkt (d.h. nur ein Gut wird von den Konsumenten nachgefragt und von den Unternehmern angeboten).  $D(t)$  sei die Nachfrage während der Periode  $t$ ,  $S(t)$  das Angebot in dieser Periode und  $p(t)$  der Marktpreis. Es gelte  $D(t) = \alpha + ap(t)$ ,  $S(t) = \beta + bp(t-1)$ , wo  $\alpha, \beta, a, b$  Konstante mit  $a < 0$  und  $b > 0$  sind. Wir nehmen also an, Nachfrage und Angebot sind lineare Funktionen des Preises und das Angebot reagiere mit einer Verzögerung von einer Periode auf den Marktpreis. - Für den Fall, daß sich Angebot und Nachfrage im Gleichgewicht befinden, wollen wir den Marktpreis  $p(t)$  berechnen und dessen Verhalten in

Abhängigkeit der Steigung von Angebots- und Nachfragefunktion studieren.

$D(t) = S(t) \Rightarrow p(t) = \frac{b}{a} p(t-1) + \frac{\beta-\alpha}{a} \Rightarrow p(t+1) = \frac{b}{a} p(t) + \frac{\beta-\alpha}{a}$  für  $t=0,1,2,\dots$ , also  $p(t+1) = f(p(t))$  mit  $f(p) = \frac{b}{a} p + \frac{\beta-\alpha}{a}$ . In der Schule kann man etwa mit Hilfe der Summenformel der endlichen geometrischen Reihe und vollständiger Induktion zeigen, daß gilt

$$p(t) = p_0 \left(\frac{b}{a}\right)^t + \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^t}{1 - \frac{b}{a}} \frac{\beta-\alpha}{a}, \text{ wobei } p_0 = p(0) \text{ ist. Ferner erhält man}$$

aus  $f(p^*) = p^*$  sofort den (einzigsten) Gleichgewichtspreis  $p^* = \frac{\beta-\alpha}{a-b}$ . Wegen  $|f'(p^*)| = \left|\frac{b}{a}\right|$  ist  $p^*$  asymptotisch stabil, falls  $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$  und instabil, falls  $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$  ist. Daß im Fall der asymptotischen Stabilität gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^*$ , für  $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$  der Marktpreis aber divergent ist, kann unmittelbar nachgerechnet oder aber auch graphisch eingesehen werden (siehe Abb.7 und Abb.8).  $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$  bedeutet wegen  $a < 0$  und  $b > 0$ , daß  $b < -a$  ist, d.h. die Nachfragefunktion hat dem Absolutbetrag nach eine größere Steigung als die Angebotsfunktion, ist  $\left|\frac{b}{a}\right| > 1$ , so liegt der Fall gerade umgekehrt.

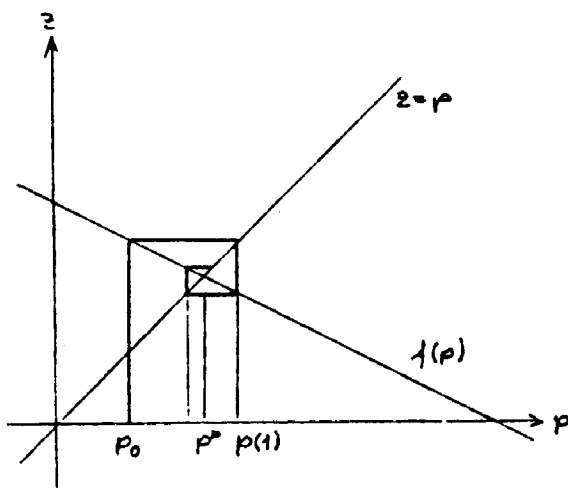


Abb. 7

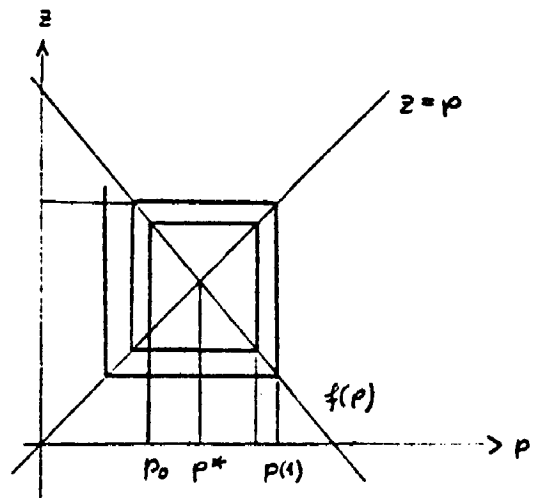


Abb. 8

Ist  $\left|\frac{b}{a}\right| = 1$ , also  $b = -a$ , so folgt  $p(t) = \begin{cases} p_0 & \text{für } t=0,2,4,\dots \\ -p_0 + \frac{\beta-\alpha}{a} & \text{für } t=1,3,5,\dots \end{cases}$  d.h., der Marktpreis oszilliert zwischen den beiden Werten  $p_0$  und  $p(1) = -p_0 + \frac{\beta-\alpha}{a}$  (Abb.9). In diesem Fall ist  $p^*$  wohl stabil aber

nicht asymptotisch stabil. (Man bleibt stets in einer vorgegebenen  $\epsilon$ -Umgebung von  $p^*$ , wenn man nicht allzu weit aus der Gleichgewichtslage auslenkt, man kommt der Gleichgewichtslage jedoch nicht mehr beliebig nahe.)

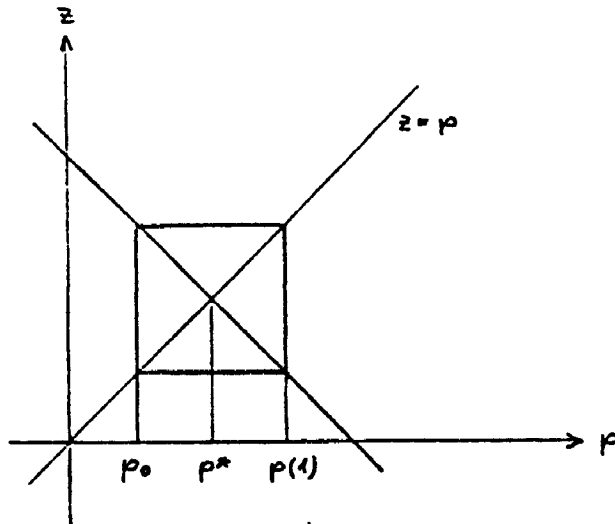


Abb.9

## 2. Computersimulationen

### 2.1 Simulationen mittels Differenzengleichungen

Man kann des öfteren dadurch Aufschluß über das qualitative Verhalten der Lösungen eines Differentialgleichungssystems erhalten, indem man die einzelnen Differentialgleichungen in Differenzengleichungen überführt und dann für verschiedene Werte von Modellparametern und unterschiedliche Anfangswerte die durch die Differenzengleichungen gegebenen Iterationen durchführt (was in vielen Fällen möglich ist). Die Überführung der Differential- in Differenzengleichungen kann dabei dadurch geschehen, daß man die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt, d.h. also im Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen  $\frac{dx_i}{dt}$  durch  $\frac{\Delta x_i}{\Delta t}$  ersetzt, und anschließend  $\Delta t$  als Zeiteinheit wählt. ( $\Delta t$  sollte dabei sehr

klein sein.)

Beispiel 3A (Simulation des Dreiklassenmodells einer Epidemie):  
Durch Überführung der Differentialgleichungen (1), (2) aus Beispiel 3 in Differenzgleichungen erhält man die folgenden Modellgleichungen:

$$\begin{aligned} (1A) \quad G(t+1) - G(t) &= -\beta G(t)K(t) & (2A) \quad A(t+1) - A(t) &= \gamma K(t) \\ (3A) \quad G(t) + K(t) + A(t) &= N, \quad t=0,1,2,\dots \end{aligned}$$

Zu beachten ist, daß sich die Werte von  $\beta$  und  $\gamma$  in den Gleichungen (1A) und (2A) auf dieselben Einheiten (z.B. Tage) beziehen müssen wie im kontinuierlichem Fall; bei Wahl einer anderen Zeiteinheit sind sie entsprechend zu ändern.

Rechnet man aus Gleichung (3A)  $A(t)$  aus und setzt in Gleichung (2A) ein, so erhält man unter Berücksichtigung von (1A) als Modellgleichung für den Zustandsvektor  $(G(t), K(t))$  unseres diskreten dynamischen Systems die Gleichungen

$$\begin{aligned} (G) \quad G(t+1) &= (1 - \beta K(t))G(t) \\ (K) \quad K(t+1) &= (1 - \gamma + \beta G(t))K(t) \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung lautet  $(G(0), K(0)) = (G_0, K_0)$ .

Die in den Gleichungen (G) und (K) angegebene Iteration läßt sich für verschiedene Werte von  $G_0, K_0, \beta$  und  $\gamma$  mit Hilfe eines Computers (wobei sogar schon ein programmierbarer Taschenrechner reicht) sehr leicht wiederholt durchführen, und man kann auf diese Weise brauchbare Vorhersagen über den Verlauf der Epidemie gewinnen.

Nicht viel Mehraufwand am Rechner bedeutet es, wenn man an Stelle eines Habitats mehrere Habitate betrachtet, zwischen denen es Migrationen (d.h. Ein- und Auswanderungen) geben kann. Solche Modelle verwendet man insbesondere zur Beschreibung der Tollwut innerhalb von Fuchspopulationen.

Beispiel 5 (Tollwutmodell mit mehreren Habitaten; siehe [4]): Ohne

Migration verlaufe die Epidemie in jedem Habitat gemäß den Modellgleichungen (G), (K) von Beispiel 3A ab, was insbesondere bedeutet, daß wir Geburten- und Todesraten vernachlässigen.

Wir bezeichnen alle Parameter, die sich auf das  $i$ -te von  $n$  Habitaten beziehen mit dem Index  $i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Bei der Tollwut verlassen nur kranke Tiere ihr Habitat, und zwar betrage die Migrationsrate von Habitat  $i$  nach Habitat  $j$   $m_{ij}$ ,  $i,j=1,2,\dots,n$ . Die  $m_{ij}$  hängen von der Topographie ab und können auch 0 sein. Unter diesen Annahmen lauten dann die Modellgleichungen:

$$(G_i) \quad G_i(t+1) = (1-\beta_i K_i(t)) G_i(t)$$

$$(K_i) \quad K_i(t+1) = (1-\gamma_i + \beta_i G_i(t)) K_i(t) - \sum_{j=1}^n m_{ij} K_i(t) + \sum_{j=1}^n m_{ji} K_j(t)$$

für  $i=1,2,\dots,n$ . Die Anfangsbedingungen sind  $G_i(0)=G_{i0}$ ,  $K_i(0)=K_{i0}$ .

In der Schule wird man zunächst mit dem einfachsten Fall zweier Habitats beginnen (siehe Abb.10), bevor man zu komplizierteren Netzwerken von Habitats übergeht.

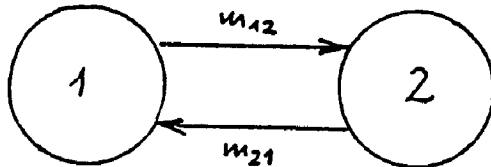


Abb.10

Für  $n=2$  lauten die Modellgleichungen:

$$G_1(t+1) = (1-\beta_1 K_1(t)) G_1(t)$$

$$K_1(t+1) = (1-\gamma_1 + \beta_1 G_1(t)) K_1(t) - m_{12} K_1(t) + m_{21} K_2(t)$$

$$G_2(t+1) = (1-\beta_2 K_2(t)) G_2(t)$$

$$K_2(t+1) = (1-\gamma_2 + \beta_2 G_2(t)) K_2(t) - m_{21} K_2(t) + m_{12} K_1(t)$$

Der Größenordnung nach sind folgende Werte realistisch:

Zeiteinheit: 1 Tag; Infektionsraten  $\beta_1 = \beta_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ , Ausscheideraten

der Kranken  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,02$ , Migrationsraten  $m_{12} = m_{21} = 1 \cdot 10^{-4}$ ;  $G_{10} = 2000$ ,  $K_{10} = 10$ ,  $G_{20} = 1500$ ,  $K_{20} = 0$ .

Liegen nicht so wie bisher Differentialgleichungssysteme vor, welche wir erst in Systeme von Differenzgleichungen überführen, sondern von vornherein Differenzgleichungen, so erspart man sich den einen Schritt des Übergangs vom kontinuierlichen zum diskreten Fall. Wenn möglich, wird man daher in der Schule zunächst eher auf Simulationen diskreter Modelle eingehen.

## 2.2 Zelluläre Automaten

Wir beschränken uns auf endliche zweidimensionale zelluläre Automaten. Zu deren Darstellung und Erklärung wird zunächst die Zeichenebene durch ein Raster von horizontalen und vertikalen Linien in  $k^2$  gleichgroße Zellen (=Kästchen) eingeteilt. - Nach Wahl einer geeigneten Numerierung der Zeilen und Spalten des Rasters bezeichne  $(i,j)$  die Zelle in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte. Die Zellen des Rasters können zum Beispiel verschiedene Stellen in einem menschlichen Organismus repräsentieren, an denen sich Körperzellen verschiedenen Typs befinden, welche sich mit der Zeit teilen, die wandern oder durch Zusammentreffen mit anderen Zellen verändert werden; solche Modellannahmen werden etwa bei Krebsmodellen gemacht. Es kann sich bei den Zellen des Rasters aber genauso gut um eine mikroskopisch dünne Schicht einer metallischen Verbindung handeln, welche mit der Zeit eine bestimmte Kornstruktur ausbildet (siehe Beispiel 6 weiter unten), oder aber es geht überhaupt nur um eine abstrakte Darstellung von gewissen "Orten", an denen im Laufe der Zeit Veränderungen stattfinden.

$x(i,j,t)$  sei der Zustand der Zelle  $(i,j)$  zum Zeitpunkt  $t$ ,  $t=0,1,2,\dots$ , wobei wir annehmen, daß die Menge der möglichen Zustände endlich ist. (Im einfachsten Fall besteht sie nur aus zwei Elementen 0 und 1.)

$x(i,j,t)$  wird durch eine Übergangsfunktion  $F$  in  $x(i,j,t+1)$  überge-

führt. Zumeist setzt man voraus, daß  $F$  eine Funktion des Zustands der Nachbarn von  $(i,j)$  zum Zeitpunkt  $t$  und von  $x(i,j,t)$  ist. Dabei wollen wir im folgenden diejenigen Zellen als  $d_2$ -Nachbarn von  $(i,j)$  bezeichnen, welche in der graphischen Darstellung der Zellen mit  $(i,j)$  mindestens eine Ecke gemeinsam haben, und unter den  $d_2$ -Nachbarn von  $(i,j)$  diejenigen als  $d_1$ -Nachbarn hervorheben, welche entlang einer Kante an  $(i,j)$  grenzen; siehe Abb.11. (" $d_i$ ",  $i=2,1$ , steht für "Distanz  $\leq i$ ".) Durch die

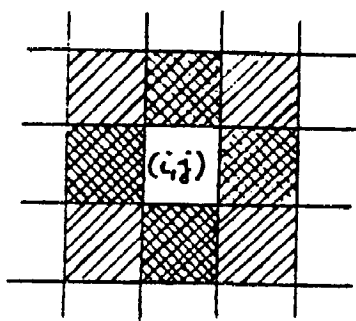


Abb.11

Anzahl der Zellen, die Menge der Zustände und die Funktion  $F$  (welche die "Übergangsregeln" wiedergibt) ist ein zellulärer Automat festgelegt. Ziel der Simulation mit Hilfe eines zellulären Automaten ist, ausgehend von einem Anfangszustand  $x(i,j,0)$  für alle  $i$  und  $j$  die zeitliche Entwicklung des Systems zu studieren.

Bei einem Krebsmodell etwa ist die Frage: Nehmen die Krebszellen mit der Zeit überhand oder werden sie durch die Freß- und Immunzellen zum Verschwinden gebracht? Wohin werden die Krebszellen mit der Zeit transportiert und bilden sie dort Cluster ?

Der Aufwand einer Simulation mittels eines zellulären Automaten hängt von der Anzahl der Zellen des Automaten, der Zahl der Zeitschritte (der "Zyklenanzahl"), der Komplexität der Übergangsregeln und der Anzahl der möglichen Zustände ab und kann daher - so wie dies bei Krebsmodellen der Fall ist - sehr beträchtlich sein. Ein sehr einfaches Beispiel, das sich für den Schulunterricht eignen könnte ist das folgende

Beispiel 6 (Kornstruktur eines Metalls, vgl.[8]): Die Menge der möglichen Zustände sei  $\{0,1\}$ , und die Überführungsregeln sollen lauten: Alle 1-Elemente werden zu 0-Elementen und alle 0-Elemente, welche  $d_2$ -Nachbarn von 1-Elementen sind, zu 1-Elementen. Als Anfangszustand werden eine oder mehrere jeweils "ringförmig" angeordnete Regionen von  $d_2$ -benachbarten 1-Elementen (und sonst nur Nullen) angenommen.

Wie man leicht einsieht (und bei der Simulation graphisch sicht-

bar machen kann) entstehen mit fortschreitender Zeit sich ringförmig ausbreitende Muster, welche sich solange bilden, bis schließlich ein stabil, oszillierendes Muster erreicht ist.

**Beispiel 7** (Selbstreproduzierendes Muster, vgl.[8]): Wiederum gebe es nur die beiden Zustände 0 und 1. Die Überführungsregeln seien: Jedes Element, welches eine gerade Anzahl von 1-Elementen als d1-Nachbarn hat, wird zum 0-Element, und jedes Element mit einer ungeraden Anzahl von 1-Elementen als d1-Nachbarn, wird zum 1-Element.

Nimmt man den in Abb.12a veranschaulichten Zustand als Anfangszustand, so ist leicht zu erkennen, daß sich die Anfangskonfiguration nach vier Zyklen selbst vierfach reproduziert hat und daß auf diese Weise ein sich selbst reproduzierendes Muster entsteht; siehe Abb.12 b,c,d,e

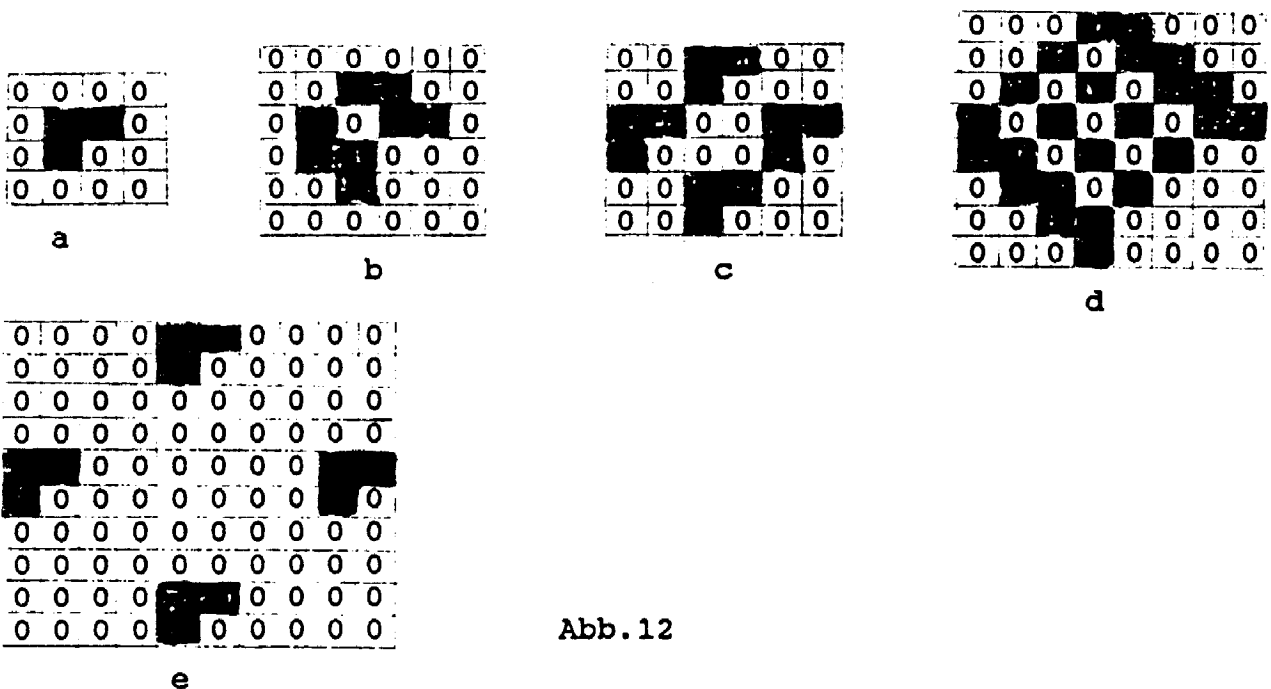


Abb.12

**Beispiel 8** (Conways Spiel des Lebens; siehe [8]): Das mitunter sehr unerwartete Wachstum einer Population kann mit Hilfe der folgenden Überführungsregeln simuliert werden. Die Zustandsmenge sei dabei wie zuerst (0,1).

- a) Hat ein 0-Element genau drei 1-Elemente zu d2-Nachbarn, so wird es zum 1-Element.
- b) Hat ein 1-Element entweder zwei oder drei 1-Elemente zu d2-Nach-



barn, so bleibt es ein 1-Element.

- c) Hat ein 1-Element weniger als zwei oder mehr als drei 1-Elemente zu d2-Nachbarn, so wird es zum 0-Element.

### 3. Didaktische Aspekte

Jede Bildung eines mathematischen Modells setzt zweierlei voraus: erstens ein *Verständnis für die Problemsituation* in einem zumeist artfremden Gebiet und zweitens die *Kenntnis, welche mathematischen Methoden zur Verfügung stehen*, um im mathematischen Modell zu Aussagen zu kommen. Beide Prämissen scheinen beim Studium von dynamischen Systemen im Mathematikunterricht nur in einem sehr beschränkten Ausmaß erfüllt oder erfüllbar.

Was die Problemsituation betrifft, so kann man z.B. nur selten davon ausgehen, daß Stoffinhalte, welche in anderen Gegenständen (wie Physik, Chemie, Biologie, Geographie) behandelt werden, dort so aufbereitet werden, daß sie einer mathematischer Beschreibung direkt zugänglich sind. Man hat daher oft nur die Möglichkeit, sehr leicht und allgemeinverständliche Sachverhalte zu modellieren, was den speziellen Charakter systemdynamischer Überlegungen häufig nicht zum Tragen bringt, oder aber ein konkretes Anwendungsbeispiel vom Standpunkt des Anwenders aus zu erklären, was von vielen Schülern (und auch Lehrern) als nicht zum Mathematikunterricht gehörig empfunden wird.

Das zweite Problem ist, daß man vor der Modellierung über einen gewissen Fundus an mathematischen Kenntnissen und Fertigkeiten verfügen sollte. Für die Beschäftigung mit dynamischen Systemen bedeutet dies, daß Kenntnisse über Differential- und Differenzgleichungen vorhanden sein müssen, was im einzelnen durchaus der Fall sein kann, was aber in der Zusammenschau, d.h. in der gleichzeitigen Anwendung, oft erhebliche Schwierigkeiten bereiten kann. Bei Beispiel 3 von oben etwa ist man sehr wohl in der Lage, mit den üblichen Kenntnissen aus Differential- und Integralrechnung die Phasenkurve einer Epidemie explizit zu berechnen, daß man aber hierbei, abgesehen von dem Wissen, daß man auf das Studium einer

Phasenkurve lossteuern kann, gleichzeitig die Ableitung der Umkehrfunktion, die Kettenregel, eine Integrationsregel, eine Extremwertbestimmung und eine Eigenschaft der Logarithmusfunktion (zur Schwellenwertbestimmung) beherrschen muß, macht die Aufgabe schwer. Natürlich bleibt der Ausweg, sich von vornherein nur auf das Hinschreiben von Modellgleichungen zu beschränken (was für sich sicher wertvoll aber im Mathematikunterricht unbefriedigend ist) oder vorweg "reine Computerlösungen" oder Simulationen am Computer ins Auge zu fassen.

Unter reinen Computerlösungen ist gemeint, daß man mit Hilfe von (nicht hinterfragter) Software sich zu gegebenen Eingangsdaten ein Endergebnis ausdrucken läßt. Daß dies eine sehr fragwürdige Praxis ist, liegt auf der Hand. - Es sei bemerkt, daß Beispiel 1 - obgleich nach dem Hinschreiben der Modellgleichungen abgebrochen - nicht für eine derartige Vorgangsweise gedacht ist; hier ist bereits das Ziel, komplizierte Zusammenhänge mit Hilfe eines Graphen überschaubar zu machen (erste Modellebene) und dann an Hand des Graphen die Zusammenhänge quantitativ (konzis) zu beschreiben (zweite Modellebene); eine nachfolgende Lösung der Aufgabe oder zumindest aber eine Computersimulation durch Überführung der Differential- in Differenzgleichungen würde das Bild natürlich vervollkommen. Computersimulationen im Mathematikunterricht sind allerdings auch nicht immer unproblematisch. Einerseits ist die Implementierung eines Verfahrens, ganz allgemein die Handhabung eines Computers, eher Gegenstand des Informatikunterrichts als Sache der Mathematik, andererseits besteht die Gefahr, daß Schüler in vorgeführten oder auch durch eigene Eingaben von Parameterwerten erzeugten Sonderfällen oft nur ein punktuelles Geschehen ohne theoretisch fundierbaren Bezug zu einem allgemeinen Prinzip sehen. - Daß diese Gefahr aber nicht immer besteht, zeigt etwa Beispiel 6, bei dem stabile Oszillationen in eindrucksvoller Weise zugleich sichtbar und theoretisch verständlich gemacht werden können.

Trotz aller Vorbehalte lassen sich also immer wieder geeignete Ansatzpunkte für die Behandlung dynamischer Systeme im Mathematikunterricht sowohl im Hinblick auf die Theorie als auch bezüglich der praktischen Anwendung finden, was insbesondere die in den

Abschnitten 1 und 2 behandelten Beispiele deutlich gemacht haben sollten.

### Literaturhinweise

- [1] Berry J.S. et al: Teaching and Applying Mathematical Modelling, Halsted Press, New York, 1984
- [2] Bossel H.: Systemdynamik. Grundwissen, Methoden und BASIC-Programme zur Simulation dynamischer Systeme. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden, 1987
- [3] Casti J.L.: Dynamical Systems and Their Applications: Linear Theory. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1977
- [4] Dorninger D. und Timischl W.: A Discrete Analogue of Kendall's Pandemic Threshold Theorem. Sb. Österr.Akademie der Wiss. Math.-naturwiss.Kl. 195(1986), 319-324
- [5] Dürr R. und Ziegenbalg J.: Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzgleichungen, Verlag F.Schöningh, Paderborn, 1984
- [6] Goldberg S.: Differenzgleichungen und ihre Anwendung in Wirtschaftswissenschaft, Psychologie und Soziologie, Oldenburg, München und Wien, 1968
- [7] Knobloch H.W. und Kwakernaak H.: Lineare Kontrolltheorie. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985
- [8] Preston K. und Duff M.: Modern Cellular Automaton Theory and Applications, Plenum Press, New York, London 1984
- [9] Timischl W.: Anwendungen der Mathematik in den Biowissenschaften: Ein Überblick über Populationsmodelle mit Beispielen. Beitr. zum math.-naturwiss.Unterricht 36 (1979) 42-62